

Habt ihr schon gewusst 568 Kreisbewegung & Drehimpuls

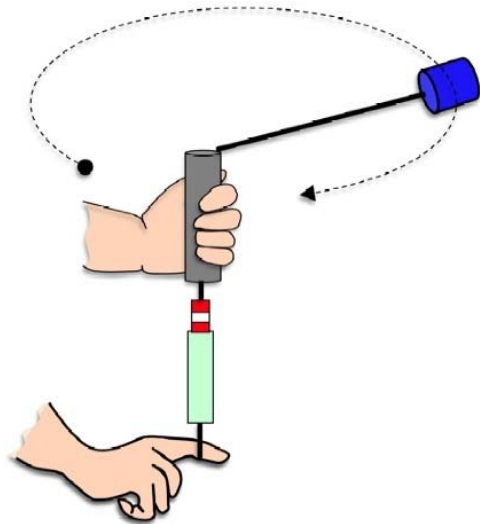
Arbeitsauftrag A

Pfadfinder machen im Wald ein Wettrennen, bei welchem in einer gewissen Entfernung ein junges Bäumchen umlaufen und dann wieder zum Startort zurück gerannt werden muss. Hannes vollzieht die Wende um das Bäumchen herum indem er – ohne abzubremsen – mit der Hand das Bäumchen packt und sich um den dünnen Stamm herum schwingen lässt. Er beschreibt somit einen Teil einer Kreisbahn.

- Erkläre wie bei diesem Beispiel die erforderliche Zentripetalkraft zustande kommt.
- Was ändert sich und warum, wenn der viel schwerere Peter die Wende ebenso vollziehen will?

Ein Gummiball beschreibt eine Kreisbewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit auf einer horizontalen Kreisbahn von 0,5 m Radius. An einer Federwaage kann man für die Zentripetalkraft den Betrag 2 N ablesen. Nun wird die Kreisbewegung mit dem Radius 1 m wiederholt.

- Welchen Wert zeigt die Federwaage jetzt an?
- Der Körper benötigt für einen vollen Umlauf auf dem Radius R_1 die Zeit T_1 . Welche Zeit T_2 ergibt sich, wenn man den Radius auf $R_2 = \frac{1}{2} R_1$ halbiert. Diskutiere diese Frage qualitativ ... Quantitativ ist das eine Herausforderung.
- Wie verändern sich der Impulsbetrag, Drehimpuls und der Energiebetrag, wenn man den Radius halbiert?

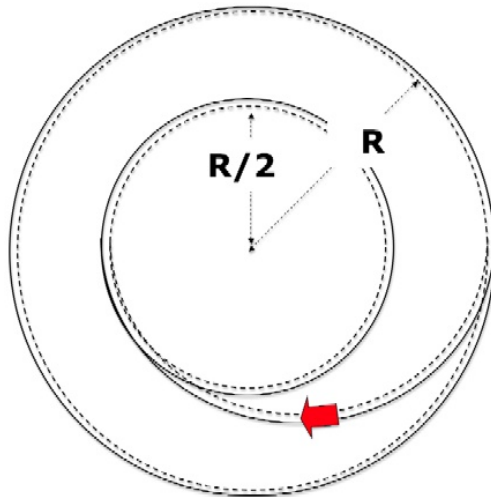


Arbeitsauftrag B

Das im Folgenden beschriebene Experiment ist ein Gedankenexperiment, denn wir gehen dabei davon aus, dass ein Eisenbahnwagen (ohne aktiven Antrieb!) in Rollrichtung eine vernachlässigbare Reibung hat – quer zur Rollrichtung aber Reibungskräfte (genauer Führungskräfte) weiterhin wirken.

In diesem Sinne bauen wir eine ‚Gedanken-Modelleisenbahn‘ aus zwei konzentrischen Gleisen mit den Radien R und $R/2$. Ein Zwischengleis mit zwei Weichen führt vom äußeren Gleis zum inneren Gleis.

- Wie ändert sich die Geschwindigkeit, der Impuls und die Energie eines Eisenbahnwagens (ohne Antrieb), der reibungsfrei mit der Geschwindigkeit v auf dem äußeren Gleis fährt und dann über die Weichen auf das innere Gleis umgelenkt wird. Bleibt der Drehimpuls bei dieser Fahrt konstant?
- Wenn der Eisenbahnwagen (reibungsfrei!) auf dem äußeren Gleis die Zeit T_1 benötigt, um eine Runde zu fahren, welche Zeit T_2 ergibt sich dann nach der Umlenkung über die Weichen auf das innere Gleis?



Arbeitsauftrag C

Henning kennt aus seinem Physikunterricht folgendes Experiment: Ein Gummistopfen rotiert auf einer Kreisbahn. An einem bestimmten Punkt der Kreisbahn wird die Halteschnur mit einer Rasierklinge durchgeschnitten. Der Gummistopfen fliegt tangential zur bisherigen Kreisbahn davon. Hannes sieht das als Beweis dafür, dass der Drehimpuls, den der Gummistopfen vor dem Zerschneiden seiner Halteschnur hatte, nun in einen Impuls umgewandelt wird, mit dem der Gummistopfen nach dem Zerschneiden der Schnur davon fliegt.

- Diskutiere mit deinem Team: Hat Hannes Recht?

Lösungshinweise

- a) Erkläre wie bei diesem Beispiel die erforderliche Zentripetalkraft zustande kommt.
- Der Baum wird verbogen – und durch diese Verbiegung entsteht eine „elastische Kraft“; die Verbiegung und damit die notwendige Zentripetalkraft wächst auf den Wert an, der für die beschriebene Kreisbahn notwendig ist – es sei denn, der Baum bricht vorher.
- b) Was ändert sich und warum, wenn der viel schwerere Peter die Wende ebenso vollziehen will?
- Bei einer größeren Masse, gleicher Bahngeschwindigkeit und gleichem Radius ist eine größere Zentripetalkraft notwendig ... die ein „kleines Bäumchen“ eventuell nicht aufbringen kann.
- c) Ein Gummiball beschreibt eine Kreisbewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit auf einer horizontalen Kreisbahn von 0,5 m Radius. An einer Federwaage kann man für die Zentripetalkraft den Betrag 2 N ablesen. Nun wird die Kreisbewegung mit dem Radius 1 m wiederholt. Welchen Wert zeigt die Federwaage jetzt an?
- Da die Zentripetalkraft umgekehrt direkt proportional zum Radius ist (bei gleicher Masse und gleicher Bahngeschwindigkeit), ergibt sich eine Zentripetalkraft von 1N.
- d) Der Körper benötigt für einen vollen Umlauf auf dem Radius R_1 die Zeit T_1 . Welche Zeit T_2 ergibt sich, wenn man den Radius auf $R_2 = \frac{1}{2} R_1$ halbiert. Diskutiere diese Frage qualitativ ...
- Die Zentripetalkraft wirkt senkrecht zur Bahngeschwindigkeit – also erfolgt durch die Zentripetalkraft keine Beschleunigung des Körpers – und damit bleibt seine Bahngeschwindigkeit (bei Reibungsfreiheit) konstant. Wenn man den Radius aber halbiert, wird an der Schnur mit einer Kraft F längs eines Weges Δs gezogen. Die zugehörige Energie $\Delta E = F \cdot s$ vergrößert die kinetische Energie des Körpers in der Umlaufbahn – d.h. die Bahngeschwindigkeit des Körpers nimmt zu. Das ist kein Widerspruch zur obigen Aussage, denn durch die Verkürzung der Schnur bewegt sich der Körper auf keiner Kreisbahn mehr – also steht die Zentripetalkraft auch nicht mehr senkrecht zur Bahngeschwindigkeit. Bei gleicher Bahngeschwindigkeit würde die Umlaufzeit T_2 bei halbem Radius auf die Hälfte sinken – weil der Umfang halbiert wird. Weil die Bahngeschwindigkeit aber zunimmt, ergibt sich eine Umlaufzeit T_2 von kleiner als $\frac{1}{2} T_1$.
- ... Quantitativ ist das eine Herausforderung.
- Es gibt unterschiedliche quantitative Ansätze (siehe z.B. Sendung Nr. 568 halbiertes Radis.pdf) Der Drehimpuls bleibt bei der Radiushalbierung konstant, weil kein Drehmoment auftritt. Für das Trägheitsmoment gilt: $I = m \cdot R^2$... damit gilt nach dem Drehimpulserhaltungssatz: $I_{(R)} \cdot \omega_{(R)} = I_{(R/2)} \cdot \omega_{(R/2)}$ Damit ergibt sich $\omega_{(R/2)} = 4 \cdot \omega_{(R)}$... und damit haben wir bei einer Radius-Halbierung eine doppelte Bahngeschwindigkeit – und damit bekommen wir: $T_{(R/2)} = \frac{1}{4} \cdot T_{(R)}$
- e) Wie verändern sich der Impulsbetrag und der Energiebetrag, wenn man den Radius halbiert
- Bei doppelter Bahngeschwindigkeit und gleicher Masse verdoppelt sich der Impulsbetrag ... der Energiebetrag vervierfacht sich. Und der Drehimpuls bleibt konstant – siehe oben.
- f) Wie ändert sich die Geschwindigkeit, der Impuls und die Energie eines Eisenbahnwagens (ohne Antrieb), der reibungsfrei mit der Geschwindigkeit v auf dem äußeren Gleis fährt und dann über die Weichen auf das innere Gleis umgelenkt wird.
- Der Eisenbahnwagen erfährt auf den Schienen keine Kraft in Rollrichtung (Reibungsfreiheit in dieser Richtung). Die Haltekräfte durch die Schienen wirken immer vertikal zur Bahngeschwindigkeit – also bleibt die Geschwindigkeit, der Impuls und die kinetische Energie des Eisenbahnwagens konstant. Allerdings erfolgt über die vertikal zur Rollrichtung wirkenden Haltekräfte ein Drehmoment von dem Eisenbahnwagen auf die Schienen. Der Eisenbahnwagen hat auf dem kleineren Radius einen kleineren Drehimpuls. Quantitativ: Das Trägheitsmoment sinkt bei gleicher Masse (punktförmig angenommen) und halben Radius auf ein Viertel. Die Winkelgeschwindigkeit wächst bei gleicher Bahngeschwindigkeit und halbem Radius auf den doppelten Wert. Der Drehimpuls sinkt also insgesamt auf den halben Wert.
- g) Wenn der Eisenbahnwagen (reibungsfrei!) auf dem äußeren Gleis die Zeit T_1 benötigt, um eine Runde zu fahren, welche Zeit T_2 ergibt sich dann nach der Umlenkung über die Weichen auf das innere Gleis?
- Die Zeit T_2 wird bei halben Radius und konstanter Bahngeschwindigkeit halbiert.
- h) Hannes hat nicht Recht! Impuls kann man niemals in Drehimpuls umwandeln oder umgekehrt. Den Drehimpuls eines Körpers kann man nur ändern, wenn der Körper ein Drehmoment erfährt. Beim Zerschneiden der Schnur wirkt aber kein Drehmoment auf den Körper – ganz im Gegenteil, der Körper fliegt mit exakt dem Impuls weg, den er im Moment des Zerschneidens hatte. UND er behält auch genau den Drehimpuls bei, den er vor dem Zerschneiden hatte – er verliert diesen Drehimpuls nicht! Er nimmt ihn bei seinem tangentialen Wegflug einfach mit. Es ändert sich aber hierbei die Winkelgeschwindigkeit und der Radius bei diesem Wegflug – und zwar exakt so, dass der Drehimpuls erhalten bleibt!
- Fazit: Kein Drehmoment – also keine Drehimpulsänderung ... und keine äußeren Kräfte – also keine Impulsänderung!